Devoir commun, classes de TS, Lycée Elie Cartan

Les élèves faisant la spécialité Mathématiques ne feront pas l'exercice 2 et feront à la place l'exercice intitulé « **EXERCICE (Enseignement de spécialité) » (page 4)**

Exercice 1 (tronc commun et spé math)

1) La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$.

a) Calculer u_1, u_2 et u_3, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

b) Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$. Calculer w_0 ,w_1, w_2 et w_3.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

d) La suite (u_n) est-elle monotone. Est-elle convergente ?

2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ (ln désignant la fonction logarithme népérien).

a) Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

b) Soit S_n la suite définie, pour tout entier naturel n, par $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

Exprimer S_n en fonction de n et déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (tronc commun uniquement)

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte. **Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.** Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives
$-2 + 3i$, $-3 - i$ et $2,08 + 1,98i$. Le triangle ABC est :

(a) : isocèle et non rectangle **(b)** : rectangle et non isocèle
(c) : rectangle et isocèle **(d)** : ni rectangle ni isocèle

2. À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par $z' = \dfrac{z-4i}{z+2}$.

L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$ est :

(a) : un cercle de rayon 1 **(b)** : une droite
(c) : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

3. Les notations sont les mêmes que dans la question 2.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

(a) : un cercle **(b)** : une droite
(c) : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

4. Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i. L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :

(a) : $z'=\left(\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ **(b)** : $z'=\left(-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

(c) $z'=\left(\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ **(d)** : $z'=\left(\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

Exercice 3 (tronc commun et spé math)

Les êtres vivants, végétaux ou animaux, assimilent du carbone, dont la grande majorité sont des atomes de carbone 12, mais il y a quelques atomes de du carbone 14 radioactif, noté ^{14}C. La proportion du nombre de noyaux de ^{14}C par rapport au nombre de noyaux de ^{12}C reste constante pendant toute leur vie. À la mort de l'organisme, tout échange avec le milieu naturel cesse et les atomes de ^{14}C disparaissent peu à peu. La radioactivité décroît alors avec le temps. On admet que le rapport entre le nombre de ^{14}C et ^{12}C est resté constant dans les êtres vivants au cours des derniers millénaires. Le temps écoulé depuis la mort d'un être vivant peut donc être mesuré en évaluant la quantité de ^{14}C qui lui reste.

Soit $N(t)$ le nombre d'atomes de ^{14}C existant à l'instant t exprimé en années, dans un échantillon de matière organique. Les physiciens montrent que $\underline{N'(t) = -\,1{,}210\times10^{-4}N(t)}$. (1)

La vitesse de désintégration est donc proportionnelle au nombre d'atomes présents.

1) Sans résoudre l'équation différentielle (1) peut-on déduire de son expression que la fonction N est décroissante ?
2) On appelle N_0 le nombre d'atomes de ^{14}C initial. Déterminer $N(t)$ en fonction de t et de N_0. Tracer la courbe C représentative de la fonction N dans un repère orthogonal (on pourra prendre en abscisse comme échelle 5000 ans pour 1cm et en ordonnée N_0 représenté par 5 cm).
3) Quel est le pourcentage d'atomes de carbone perdus au bout de 20 000 ans (arrondir au centième) ?
4) On appelle *temps caractéristique* le nombre réel τ (exprimée en année) défini par $\tau=\dfrac{1}{1{,}210\times10^{-4}}$. Calculer une équation de la tangente à C au point d'abscisse $t=0$.

   Démontrer que τ est l'abscisse du point d'intersection entre la tangente à la courbe C au point d'abscisse $t = 0$ et l'axe des abscisses.

   Tracer cette tangente dans le repère de la question 1) .
5) On appelle *période ou demi-vie* le temps au bout duquel la moitié des atomes sont désintégrés. Déterminer la période du ^{14}C (on donnera la valeur exacte et la valeur approchée par arrondi à l'unité près).
6) Des archéologues ont trouvé un fragment d'os dont la teneur en ^{14}C est 15% de la teneur en ^{14}C d'un os « actuel » de même masse. Déterminer l'âge de ce fragment (arrondir à l'année près).

Exercice 4 (tronc commun et spé math)

Partie A : Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ si\ x > 0 \quad f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) \end{cases}$$ et (C) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que *f* est continue en 0.
   b) Etudier la dérivabilité de *f* en 0.
   c) En posant h = 2/*x* , trouver la limite de *f* en +∞.

2) a) Pour *x* appartenant à]0 ; +∞[, calculer *f* '(*x*) et vérifier que $f''(x) = \dfrac{-4}{x(x+2)^2}$

   b) Etudier le sens de variation de *f* ' , et trouver la limite de *f* ' en +∞. En déduire le signe de *f* '(*x*).
   c) Dresser le tableau de variation de *f*.

3) Soit *u* la fonction numérique définie sur [0 ; +∞[par $u(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ et (H) sa représentation graphique.
   a) Dresser le tableau de variation de *u*.

   b) Vérifier que pour tout *x* de l'intervalle]0 ; +∞[, on a : $f(x) - u(x) = x f'(x)$.
   En déduire la position relative de (C) et de (H).

   c) λ étant un réel strictement positif, montrer que la tangente à (C) au point d'abscisse λ rencontre l'axe des ordonnées au point K d'ordonnée *u*(λ).

Partie B :
On considère une fonction *g* définie et dérivable sur]0 ; +∞[et possédant la propriété (p) suivante :

Pour tout *x* appartenant à]0 ; +∞[, $g(x) - xg'(x) = \dfrac{2x}{x+2}$

On pose, pour tout *x* appartenant à]0 ; +∞[, $G(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

Exprimer *G*'(*x*) en fonction de *g*'(*x*) et montrer que pour tout *x* appartenant à]0 ; +∞[,
$G'(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x}$.
En déduire l'expression générale de *G*(*x*) puis celle de *g*(*x*).

Partie C :
Détermine l'aire, en unités d'aires, comprise entre l'axe des abscisses, (C) , la droite d'équation *x*=1 et celle d'équation *x*=2. On pourra utiliser une intégration par partie.

Indication :
$$\frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$$