Lycée Elie Cartan, classe de Terminale S

BAC BLANC 2005, épreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures

**Ce sujet comporte 5 exercices : tous les exercices sont communs sauf l'exercice 3, les élèves faisant la spécialité math feront l'exercice « 3 bis ».
La calculatrice est autorisée.**

Exercice 1 (3 points)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que $f(xy)=f(x)+f(y)$ (Egalité (1)).
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (On rappelle que toute réponse doit être justifiée)

1) Si $f(0)$ existe alors $f(x)=0$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$
2) $f(1)=0$
3) $f\left(\dfrac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$ pour tout a et b de $\mathbb{R}_+^*$
4) $f(a^n)=nf(a)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout a de $\mathbb{R}_+^*$.
5) La fonction « logarithme népérien » vérifie l'égalité (1).

Exercice 2 (4 points)

Il y a une seule bonne réponse par question. On ne demande pas de justification.
Toute bonne réponse rapporte un point, toute erreur enlève 0,5 point. Une absence de réponse n'enlève pas de point.

1) La forme algébrique du nombre complexe $(1+i)^2(2-3i)$ est :
a) $6-4i$ b) $6+4i$ c) $-6-4i$ d) $-6-4i$

2) $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est égal à :
a) $\sqrt{3}i$ b) $e^{i\pi}$ c) 1 d) i

3) L'écriture complexe de l'homothétie de centre A d'affixe i et de rapport -2 qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' est :
a) $z'=-2z$ b) $z'=-2z-3i$ c) $z'=-2z+3i$ d) $z'=-2z+i$

4) La forme exponentielle du nombre complexe $(1+i)(1+i\sqrt{3})$ est :
a) $e^{i\frac{7\pi}{12}}$ b) $2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ c) $2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ d) $e^{i\frac{5\pi}{12}}$

<u>Exercice 3 (6 points)</u> ***<u>pour les élèves n'ayant pas choisi spécialité Mathématiques</u>***

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

1°) a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 < u_n < 1$

c) Étudier le sens de variation de la suite (u_n)

2°) On pose $x_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times ... \times u_n$

a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$

b) Déterminer la limite de la suite (x_n).

3°) On pose $v_n = \ln(u_n)$

a) Justifier que la suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$.

b) Prouver que la suite (v_n) est croissante.

c) Démontrer que la suite (v_n) est bornée.

d) Déterminer la limite de la suite (v_n)

4°) On pose $y_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$

a) Exprimer y_n en fonction de x_n .

b) Déterminer la limite de la suite (y_n)

<u>Exercice 3 bis</u> ***<u>de spécialité mathématique</u>***

<u>Partie I</u>

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$
2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

<u>Partie II</u>

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise aussi n, divise 2.
3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B, divise 4n.
4. Dans cette question on suppose que n est impair.
   (a) Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
   (b) Montrer que d divise n.
   (c) En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.
5. On suppose maintenant que n est pair.
   (a) Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.
   (b) Montrer que d est de la forme d = 2p, où p est impair.
   (c) Montrer que p divise n. En déduire que d = 2. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.)

Exercice 4 (2 points)

Dans une population donnée, la proportion d'individus atteints d'une certaine maladie est x ($0 \leq x \leq 1$). On dispose d'un test de dépistage de cette maladie et on voudrait étudier sa fiabilité. On connaît les données suivantes :

- La probabilité qu'une personne considérée comme malade ait un test positif est de 0,98.
- La probabilité qu'une personne considérée comme saine ait un test positif est de 0,01.

On choisit au hasard un individu de cette population et on le soumet au test.
On note *M*= « l'individu est malade » et *T*= « l'individu a un test positif ».

On note $f(x)$ la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade.

1) Montrer que $f(x) = \dfrac{98x}{97x+1}$.
2) On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit malade est supérieure à 0,95.
   Le test est-il fiable si la proportion x d'individus atteints de la maladie est de 0,05.
3) A partir de quelle proportion x le test est-il fiable ?

Exercice 5 (5 points)

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2e^x + 2x - 7$.

1) Etudier les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
2) Etudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α telle que :
   $0{,}94 < \alpha < 0{,}941$.
4) Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.
5) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$.
   Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
6) Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
   Vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
   Dresser le tableau de variation de f.
7) Ces affirmations sont-elles vraies ou fausses (justifiez) :
   a) $f(0{,}94) \leq f(\alpha)$.
   b) $f(\alpha) \leq f(0{,}941)$.
   c) $f(\alpha) \geq -2\alpha\, e^{-\alpha} - 5$

Elements de réponse pour le bac blanc mars 2005

Exo 1

1) Si f(0) existe alors f(0x)=f(0)+f(x) donc f(0)=f(0)+f(x) c'est-à-dire f(x)=0
2) f(1×1)=f(1)+f(1) donc f(1)=f(1)+f(1), c'est-à-dire f(1)=0

$$f\left(\frac{a}{b}\times b\right)=f\left(\frac{a}{b}\right)+f(b)$$

3) $$\text{donc}\quad f(a)=f\left(\frac{a}{b}\right)+f(b)$$

$$\text{c'est à dire}\quad f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$$

4) Démontrons « $f(a^n)=nf(a)$ » on a f(a)=1f(a) donc la propriété est vraie pour n=1
Supposons qu'elle soit vraie pour n, montrons alors qu'elle vraie pour n+1
$f(a^{n+1})=f(a\times a^n)=f(a)+nf(a)=(n+1)f(a)$ la propriété est donc vraie pour tout n
5) On sait que ln(ab)=ln(a)+ln(b) donc la fonction ln vérifie (1)

Exo2

1) (1+i)²(2-3i)=(1+2i-1)(2-3i)=2i(2-3i)=4i+6 (réponse b))

2) $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=i\sqrt{3}$ (réponse a))

3) z'-i=-2(z-i) donc z'=-2z+3i (réponse c))

4) $(1+i)(1+i\sqrt{3})=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}+2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ (réponse c))

Exo3

1) a) $u_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-(n+1)^2+n(n+2)}{(n+1)^2}=1+\frac{-(n+1)^2+n(n+2)}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$

b) $u_n>0$ car u_n est un quotient de nombres strictement positifs

$\frac{1}{(n+1)^2}>0$ donc $-\frac{1}{(n+1)^2}<0$ donc $1-\frac{1}{(n+1)^2}<1$ donc $u_n<1$

c) $u_n=f(n)$ avec $f(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}=1-(x+1)^{-2}$

or $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^3}>0$ donc f croissante sur R+ et u_n croissante

2) a)Démontrons par récurrence que $x_n=\frac{n+2}{2(n+1)}$

Ceci est vrai au rang 1, en effet $x_1=u_1=\frac{1(3)}{2^2}=\frac{3}{4}$ et $\frac{1+2}{2(1+1)}=\frac{3}{4}$,

On suppose que c'est vrai au rang n : $x_n=\frac{n+2}{2(n+1)}$,

et on démontre que c'est vrai au rang n+1 : $x_{n+1}=\frac{(n+1)+2}{2((n+1)+1)}=\frac{n+3}{2(n+2)}$

On a $x_{n+1}=x_n\times u_{n+1}=\frac{n+2}{2(n+1)}\times\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}=\frac{n+3}{2(n+2)}$ donc la propriété est bien vraie pour tout n.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}x_n=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$

3) a) $u_n>0$ donc est définie.

b) u_n est croissante et ln est une fonction croissante donc v_n est croissante

c) $u_1 < u_n < 1$ (car u_n est croissante) et ln croissante sur $R+$ donc $\ln(u_1) < \ln(u_n) < \ln(1)$

C'est à dire : $\ln(\frac{3}{4}) < v_n < 0$

d) $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ car $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{(x+1)^2} = 1$

or la fonction ln est continue donc $\lim_{x\to+\infty} \ln(u_n) = \lim_{x\to+\infty} v_n = 0$

4) a) $y_n = v_1 + v_2 + ... + v_n = \ln(u_1) + \ln(u_2) + ... + \ln(u_n) = \ln(u_1 \times u_2 \times .. \times u_n) = \ln(x_n)$

b) $\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$ et ln continue sur $R+*$ donc $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(x_n) = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$

Exo 3 bis

Partie I

1) $(x^2+2)^2-4x^2=x^4+4x^2+4-4x^2=x^4+4$

2) $x^4+4=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)$

Partie II

1) $n^4+4=(n^2+2-2n)(n^2+2+2n)$ et $n^2+2-2n>1$ et $n^2+2+2n>1$ pour $n>1$ donc n^4+4 n'est pas premier

2) Si k divise A et n alors k divise A-(n^2-2n) c'est-à-dire k divise 2.

3) Si k divise A et B, alors k divise A+B c'est-à-dire k divise 4n

4) a) n impair donc n=2p+1

$A=(2p+1)^2-2(2p+1)+2=2(2p^2)+1=2k+1$ donc A impair, idem pour B

b) d =PGCD(A,B) donc d divise A et B donc d divise 4n, or d premier avec 4 (car si d divise 4 alors A et B seraient pairs) donc d'après le théorème de Gauss d divise n

c) d divise A et n donc d'après le II 2) d divise 2.

Comme d divise 2, on a d=2 ou d=2 n'est pas possible car A et B seraient pairs sinon, donc d=1 et A et B sont premiers entre eux.

5) a) n est pair donc n=2p et $A=n^2-2n+2=4p^2-4p+2\equiv 2[4]$ donc 4 ne divise pas A

b) $A=n^2-2n+2=4p^2-4p+2\equiv 0[2]$ donc 2 divise A

$B=n^2+2n-2=4p^2+4p+2\equiv 0[2]$ donc 2 divise B

2 est un diviseur commun de A et B donc PGCD(A,B)=2k

Or si k est pair cela signifie que PGCD(A,B)=4k' mais A et B ne sont pas divisible par 4 donc k est impair.

c)On sait (II 3)) que d divise 4n, c'est à dire 2k divise 4n ou encore k divise 2n, or k est premier avec 2 (k impair) donc k divise n.

k divise A et n donc k divise 2 (II 2)) donc k=1 ou k=2 mais k est impair donc k=1 et finalement d=2.

Exercice 4

1) $f(x)=P_T(M)=P(M \text{ et } T)/P(M)$

or $P(T)=P(T \text{ et } M)+P(T \text{ et } \overline{M})=P_M(T) \times P(M) + P_{\overline{M}}(T) \times P(\overline{M})=0,98x+0,01(1-x)=0.97x+0,01$

P(MetT)=0,98x

Finalement $f(x)=\frac{0,98x}{0,97x+0,01}=\frac{98x}{97x+1}$

2) $f(0,05)\approx 0,83<0,95$ donc le test est non fiable

3) Le test est fiable si $f(x)>0,95$ c'est à dire si $\frac{98x}{97x+1}>0,95$ ou encore si $x>\frac{0,95}{5,85}$

Le test est fiable si x est supérieur à 16,2%

Exercice 5

$g(x)=2e^x+2x-7$

1) $\lim_{x \to +\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x)=-\infty$

2) $g'(x)= 2e^x+2>0$ pour tout x de R donc g est strictement croissante sur R.

3) g est strictement croissante sur [0 ;1], g est continue sur [0 ;1] (en tant que composée de fonction continues sur R), et g(0<0<g(1), il existe donc un unique α sur [0 ;1] telle que $g(\alpha)=0$.

Sur]-∞ ;0[il n'y a pas de solution car si x<0 alors g(x)<g(0)<0

Sur]1 ;+∞[il n'y a pas de solution car si x>1 alors g(x)>g(1)>0

Finalement il existe une unique solution telle que g(x)=0 sur R.

g(0,94)<0<g(0,941) donc $0,94<\alpha<0,941$.

4) g est donc négative sur]-∞ ;α[et positive ailleurs.

5) $\lim_{x \to +\infty} f(x)= +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)=+\infty$

5) $f'(x)=2 – 7e^{-x}+2x\, e^{-x}=e^{-x}(2\, e^x – 7+2x)= e^{-x}g(x)$

6) doncf' et g ont le même signe. Donc f est décroissante sur]-∞ ;α[et croissante sur [α ;+∞[.

7) a) $0,94<\alpha$ et f décroissante sur]-∞ ;α[donc $f(0,94)>f(\alpha)$

b) $0,941>\alpha$ et f croissante sur [α ;+∞[donc $f(0,941)>f(\alpha)$

c)$f(\alpha)=(2\alpha-5)(1-e^{-\alpha})=2\alpha- 2\alpha e^{-\alpha}-5+5e^{-\alpha} > - 2\alpha e^{-\alpha}-5$ car $2\alpha>0$ et $5e^{-\alpha}>0$